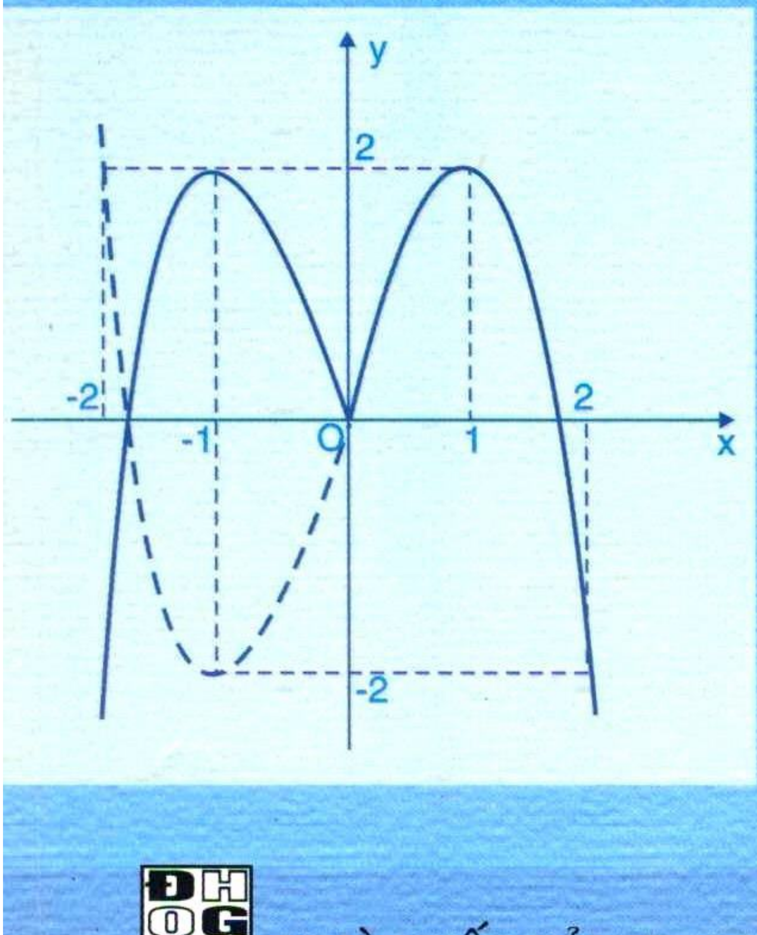
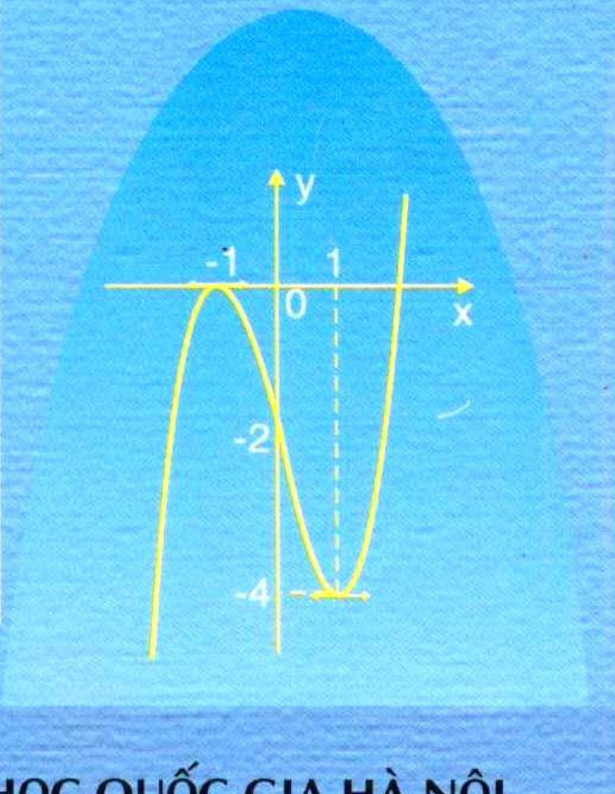
NGUYỄN THANH VÂN - TRẦN MINH QUANG

Phương pháp & bài giải
KHẢO SÁT HÀM SỐ





ĐHQG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN THANH VÂN
TRẦN MINH QUANG

PHƯƠNG PHÁP VÀ BÀI GIẢI
TOÁN KHẢO SÁT HÀM SỐ

- *THEO CHƯƠNG TRÌNH CHỈNH LÍ, HỢP NHẤT NĂM 2000*
- *LUYỆN THI TÚ TÀI VÀ TUYỂN SINH ĐẠI HỌC*
- *PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI CỤ THỂ TỪNG DẠNG*
- *MỘT SỐ CÂU TRẮC NGHIỆM*
- *VÍ DỤ MẪU LÀ CÁC ĐỀ THI TỪ NĂM 2005 VÀ CÁC NĂM TRƯỚC*

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Chúng tôi biên soạn cuốn sách này theo hướng ra đề thi của Bộ Giáo dục và Đào tạo kể từ năm 2002.

Trong phần khảo sát hàm số có nhiều thay đổi, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã không cho phép sử dụng phương trình hoành độ giao điểm có nghiệm kép để giải quyết bài toán tiếp xúc. Do đó chúng tôi chỉ sử dụng bài toán tiếp tuyến bằng cách giải phương trình hoành độ tiếp điểm.

Ngoài ra trong phần khảo sát, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã giảm tải bài toán quỹ tích và họ đường cong qua điểm cố định (dù rằng trong hình học vẫn còn ?!) nên chúng tôi đã cắt bỏ phần này.

Bạn đọc lưu ý các đề thi 2002, 2003, 2004 và 2005 rất cơ bản không đánh đố học sinh. Chúng tôi đã giải đầy đủ trong sách này và tự luyện tập bằng các đề thi tương tự ở cuối chương.

Trong quá trình biên soạn, nếu có thiếu sót, chúng tôi mong nhận được sự đóng góp ý kiến của bạn đọc.

TRẦN MINH QUANG
NGUYỄN THANH VÂN

Chương 1

HÀM SỐ – GIỚI HẠN – LIÊN TỤC – ĐẠO HÀM

VẤN ĐỀ 1: MIỀN XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

Phương pháp:

Tìm miền xác định của hàm số $y = f(x)$ là tìm tập hợp các giá trị của x sao cho $f(x)$ có nghĩa.

Chú ý:

$y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow$ $v(x) \neq 0$

$y = \sqrt[2n]{u(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow$ $u(x) \geq 0$ $(n \in N)$

$y = \log_a u(x)$ có nghĩa $\Leftrightarrow$ $u(x) > 0$ $\begin{pmatrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{pmatrix}$

$y = tgu(x)$ có nghĩa $\Leftrightarrow$ $u(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in Z)$

$y = cotgu(x)$ có nghĩa $\Leftrightarrow$ $u(x) \neq k\pi$ $(k \in Z)$

Bài 1. Tìm miền xác định của các hàm số:

a) $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$

b) $y = \ln \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x + 1} + \dfrac{\sqrt{x^2 - 3}}{x + 2}$

c) $y = \dfrac{\sqrt{x + 1}}{\log_2(5 - x)}$.

a) Ta có $x^2 - x + 1 > 0$ $\forall x \in R$ vì $\Delta < 0$

- Khi $x \geq 0$ thì $x + \sqrt{x^2 - x + 1} > 0$
- Khi $x \leq 0$ thì $x + \sqrt{x^2 - x + 1} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} \geq -x \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 \geq (-x)^2 \Leftrightarrow x \leq 1$ (luôn đúng $\forall x \leq 0$).

Vậy miền xác định $D = R$.

b) f(x) có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x + 1} > 0 \\ x^2 - 3 \geq 0 \\ x + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 2 \vee x > 3 \\ x \leq -\sqrt{3} \vee x \geq \sqrt{3} \\ x \neq -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3} \leq x < 2 \vee x > 3$

Vậy miền xác định $D = [\sqrt{3}; 2) \cup (3; +\infty)$.

c) $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\log_2(5-x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \ge 0 \\ -x+5 > 0 \\ \log_2(5-x) \ne 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x < 5 \\ -x+5 \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x < 5 \\ x \ne 4 \end{cases}$$

Vậy miền xác định $D = [1; 5)\backslash\{4\}$. ■

Bài 2. Tìm tập xác định của hàm số $y = \lg \dfrac{2^{1-x} - 2x + 1}{2^x - 1}$.

(Đại học Dược Hà Nội – 1999)

y có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} \psi(x) = \dfrac{2^{1-x} - 2x + 1}{2^x - 1} > 0 \\ 2^x - 1 \ne 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \psi(x) = \dfrac{(2^{1-x} - x) + (1-x)}{2^x - 1} > 0 \\ x \ne 0 \end{cases} \quad (*)$$

- Khi $x < 0$ thì $2^x < 2^0 = 1 \Rightarrow 2^x - 1 < 0$

  mà $2^{1-x} - 2x + 1 > 0$ với $\forall x < 0$ nên $\psi(x) < 0$ với $\forall x < 0$ (loại)

- Khi $0 < x < 1$ thì $2^0 < 2^x \Rightarrow 2^x - 1 > 0$

  Mặt khác khi $0 < x < 1 \Rightarrow 0 > -x > -1$ (1)

  $\Rightarrow 1 > 1 - x > 0 \Rightarrow 2 > 2^{1-x} > 1$ (2)

  Lấy (1) cộng (2) ta được: $2^{1-x} - x > 0$

  Do đó: $(2^{1-x} - x) + (1 - x) > 0$. Vậy $\psi(x) > 0\ \forall x \in (0; 1)$.

- Khi $x = 1$ thì $\psi(x) = 0$ (loại)

- Khi $x > 1$ thì $2^x > 2$ nên $2^x - 1 > 0$

  Mặt khác do $1 - x < 0 \Rightarrow 2^{1-x} < 1$ và $-x < -1$ nên $2^{1-x} - x < 0$.

  Do đó $\psi(x) < 0$ (loại).

  Kết luận: Miền xác định $D = (0; 1)$. ■

Bài 3. Biện luận theo m miền xác định của hàm số:

a) $y = \sqrt{mx^2 - x + 1}$ b) $y = \dfrac{\sqrt{mx^2 + (m+3)x + 3}}{x+1}$

(Tuyển sinh khối A – 1986)

a) y có nghĩa $\Leftrightarrow \psi(x) = mx^2 - x + 1 \ge 0$

- Nếu $m = 0$ thì $y \in R \Leftrightarrow \psi(x) = -x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

  Vậy miền xác định $D = (-\infty; 1]$.

- Nếu $m \neq 0$ ta có $\Delta\psi = 1 - 4m$

m		0		$\frac{1}{4}$	
$a = m$	$-$	0	$+$	|	$+$
$\Delta\psi$	$+$	||	$+$	0	$-$

+ Khi $m < 0$ thì $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ gọi $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{\Delta}}{2m}$ là 2 nghiệm của $\psi(x)$

  thì $y \in R \Leftrightarrow \psi(x) \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq x \leq x_2$

  Vậy miền xác định $D = [x_1; x_2]$.

+ Khi $0 < m < \dfrac{1}{4}$ thì $a > 0 \wedge \Delta > 0$ nên

  $y \in R \Leftrightarrow \psi(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq x_1 \vee x \geq x_2$

  Vậy miền xác định $D = \left(-\infty; \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4m}}{2m}\right] \cup \left[\dfrac{1 + \sqrt{1 - 4m}}{2m}; +\infty\right)$.

+ Khi $m \geq \dfrac{1}{4}$ thì $a > 0 \vee \Delta \leq 0$

  Vậy $\psi(x) \geq 0, \forall x \in R$ nên miền xác định $D = R$.

b) $y = \dfrac{\sqrt{mx^2 + (m + 3)x + 3}}{x + 1}$

y có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = mx^2 + (m + 3)x + 3 \geq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$

- Khi $m = 0$ thì $y \in R \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 3x + 3 \geq 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1$

  Vậy miền xác định $D = (-1; +\infty)$.

- Khi $m \neq 0$ ta có $g(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1 \vee x_2 = -\dfrac{3}{m}$

  Ta thấy $x_1 = x_2 \Leftrightarrow -1 = -\dfrac{3}{m} \Leftrightarrow m = 3$

  $x_1 = -1 < x_2 = -\dfrac{3}{m} \Leftrightarrow \dfrac{3 - m}{m} < 0 \Leftrightarrow m < 0 \vee m > 3$

  $x_1 = -1 > x_2 = -\dfrac{3}{m} \Leftrightarrow 0 < m < 3$

\+ Do đó m < 0 thì

x		-1		$-\dfrac{3}{m}$	
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Vậy miền xác định $D = \left(-1; -\dfrac{3}{m}\right]$.

\+ Nếu 0 < m < 3 thì

x		$-\dfrac{3}{m}$		-1	
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy miền xác định $D = \left(-\infty; -\dfrac{3}{m}\right] \cup (-1; +\infty)$.

\+ Nếu m = 3 thì $y \in R \iff \begin{cases} g(x) = 3(x+1)^2 \geq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$

Vậy miền xác định $D = R\backslash\{-1\}$.

\+ Nếu m > 3 thì

x		-1		$-\dfrac{3}{m}$	
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy miền xác định $D = (-\infty; -1) \cup \left[-\dfrac{3}{m}; +\infty\right)$. ■

Bài 4. Định m để hàm số xác định với mọi giá trị của x

$$y = \lg(4^x + m2^{x+1} - m).$$

(ĐH Bách khoa TPHCM – 1992)

Đặt $t = 2^x$ (điều kiện $t > 0$)

$y \in R$ với $\forall x \in R \iff 4^x + 2.2^x.m - m > 0 \quad \forall x \in R$

$\iff \begin{cases} t = 2^x \\ g(t) = t^2 + 2mt - m > 0 \quad \forall t > 0 \end{cases}$

Ta có $\Delta'g = m^2 + m$; $\Delta'g = 0 \iff m = -1 \vee m = 0$

- $-1 < m < 0$ thì $\Delta' < 0$ nên $g(t) > 0$ $\forall t \in R$ (nhận so với yêu cầu bài toán).
- Nếu $m = -1$ thì $g(t) = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 \geq 0$ $\forall t \in R$,
  lúc đó $g(t) = 0 \iff t = 1$ (loại so với yêu cầu bài toán).
- Nếu $m = 0$ thì $g(t) = t^2 \geq 0$ $\forall t \in R$,
  lúc đó $g(t) = 0 \iff t = 0$ (nhận so với yêu cầu bài toán).
- Nếu $m < -1 \vee m > 0$ thì $\Delta' > 0$.

Gọi t_1, t_2 là 2 nghiệm của $g(t)$ thì $g(t) > 0$ với $t > 0 \iff t_1 < t_2 < 0$

$\iff S = -2m < 0 \wedge P = -m > 0$ (vô nghiệm).

Do đó $y \in R$ với $\forall x \iff m \in (-1; 0]$. ■

BÀI TẬP

1. Tìm miền xác định của các hàm số:

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 15} + \dfrac{\sqrt{x-2} - 1}{\sqrt[3]{x+4}}$ b) $y = \ln \dfrac{e^x - 1}{e^x - 3}$

c) $y = \sqrt{\dfrac{|x| - 3}{1 - |x|}} + \log_3 \dfrac{x+1}{x^2 - 5x + 6}$ d) $y = e^{\ln\left(\frac{x+5}{x-1}\right)}$

e) $y = e^{\sqrt{x^2-4}} + \sqrt{\lg \dfrac{2x+1}{x+5} - 2}$ f) $y = \sqrt{(x^2 + x - 12)\ln(x+2)}$

g) $y = \sqrt{\log_2(x^2 + 2)\log_{2-x} 2 - 2}$ *(ĐH An ninh - 2001)*

h) $y = 2^{\sqrt{|x-3| - |8-x|}} + \sqrt{\dfrac{-\log_3(x-1)}{x^2 - 2x - 8}}$ *(ĐH Y Hà Nội - 1997).*

2. Cho hàm số $y = \dfrac{\sqrt{(m+1)x - m}}{\ln(mx - m + 2)}$.

a) Tìm miền xác định của hàm số khi $m = -\dfrac{1}{2}$.

b) Tìm m để hàm số xác định với mọi $x \geq 1$.

3. Biện luận theo m miền xác định của hàm số: $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - mx + 3}$.

4. Tìm m để hàm số xác định trên R.

a) $y = \dfrac{-3x + 1}{x^2 - 2mx + 4}$

b) $y = \sqrt{(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3}$ *(ĐH Bách khoa TP.HCM - 1995)*

c) $y = \lg[(2 - m)x^2 + 4mx + 6 - 2m]$ *(Học viện KTQS - 1997)*

VẤN ĐỀ 2: MIỀN GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ

Cho hàm số $y = f(x)$ có miền xác định D thì miền giá trị

$$T = \{y \in R \,/\, y = f(x) \text{ với } x \in D\}.$$

Phương pháp:

Xét phương trình $y = f(x)$ (*) với x là ẩn số, y là tham số.

Miền giá trị T là tập hợp các giá trị y để (*) có nghiệm $x \in D$.

Chú ý: • Có thể dùng bất đẳng thức hay lập bảng biến thiên để tìm miền giá trị.

• Từ miền giá trị có thể biết được giá trị lớn nhất, nhỏ nhất..

Bài 5. Tìm miền giá trị của các hàm số:

a) $y = x^2 - 2x + 5$

b) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

c) $y = \dfrac{2x - 1}{x^2 + x + 4}$

d) $y = \dfrac{1 + \cos x}{\sin x + \cos x + 3}$.

a) Miền xác định D = R.

Xét phương trình: $x^2 - 2x + 5 - y = 0$ (*)

Phương trình (*) có nghiệm trên R $\Leftrightarrow \Delta' = 1 - (5 - y) \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 4$

Vậy miền giá trị $T = [4; +\infty)$.

b) Miền xác định D = R.

Xét phương trình: $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ ($\forall x \in R$ hàm số có nghĩa

$$\Leftrightarrow \quad yx^2 + y = x^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad (y - 1)x^2 = -y - 1 \quad (**)$$

(*) có nghiệm trên R $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1 + y}{1 - y} \geq 0 \\ y \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq y < 1$

Vậy miền giá trị $T = [-1; 1)$.

c) Ta có $x^2 + x + 4 > 0 \ \forall x \in R$.

Vậy miền xác định D = R.

Xét phương trình: $y(x^2 + x + 4) = 2x - 1$

$$\Leftrightarrow \quad yx^2 + (y - 2)x + 4y + 1 = 0 \quad (*)$$

Khi y = 0 thì (*) thành $-2x + 1 = 0$ có nghiệm $x = \dfrac{1}{2} \in R$.

Khi $y \neq 0$ thì $\Delta_x = (y - 2)^2 - 4y(4y + 1) = -15y^2 - 8y + 4$

Phương trình (*) có nghiệm trên R $\Leftrightarrow \Delta_x \geq 0 \Leftrightarrow 15y^2 + 8y - 4 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-4 - \sqrt{76}}{15} \leq y \leq \frac{-4 + \sqrt{76}}{15}$$

Do đó miền giá trị $T = \left[\dfrac{-4 - \sqrt{76}}{15}; \dfrac{-4 + \sqrt{76}}{15}\right]$.

d) Ta có $|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2} \Rightarrow \sin x + \cos x + 3 \neq 0 \ \forall x \in R$

Vậy miền xác định D = R.

Xét phương trình: $y(\sin x + \cos x + 3) = 1 + \cos x$

$\Leftrightarrow \quad y\sin x + (y-1)\cos x + 3y - 1 = 0 \qquad (*)$

Phương trình (*) có nghiệm trên R $\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 \geq c^2$

$\Leftrightarrow \quad y^2 + (y-1)^2 \geq (3y-1)^2$

$\Leftrightarrow \quad 7y^2 - 4y \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \frac{4}{7}$

Vậy miền giá trị $T = \left[0; \frac{4}{7}\right]$. ■

Bài 6. Tìm miền giá trị của các hàm số:

a) $y = x + \frac{1}{x}$ b) $y = 3\sin^2 x + 3\sin 2x - 5\cos^2 x + 1$.

a) Do x và $\frac{1}{x}$ cùng dấu nên $|y| = \left|x + \frac{1}{x}\right| = |x| + \frac{1}{|x|}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy: $|y| \geq 2\sqrt{|x|\frac{1}{x}} = 2$

$\Leftrightarrow \quad y \geq 2 \vee y \leq -2$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow |x| = \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Vậy miền giá trị $T = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

b) Ta có $y = 3\sin^2 x + 3\sin 2x - 5\cos^2 x + 1$

$\Leftrightarrow \quad y = \frac{3}{2}(1 - \cos 2x) + 3\sin 2x - \frac{5}{2}(1 + \cos 2x) + 1$

$\Leftrightarrow \quad y = -4\cos 2x + 3\sin 2x$

Do bất đẳng thức Bunhiacopski ta có :

$|y| \leq \sqrt{16+9}.\sqrt{\cos^2 2x + \sin^2 2x} = 5 \Leftrightarrow -5 \leq y \leq 5$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{-4} = \frac{\sin 2x}{3} \Leftrightarrow tg2x = \frac{3}{-4}$

Vậy miền giá trị $T = [-5; 5]$. ■

BÀI TẬP

1. Tìm miền giá trị các hàm số:

a) $y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$ b) $y = \sqrt{x+4} + \sqrt{9-x}$